Correction SIGMA n°1

EXERCICE 1 - Calculs de Sommes

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+1} \right\}$.

   - **Initialisation :** On a bien $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{(n+1)^2+(n+1)} \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-n-1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

   - **Conclusion :** $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+1}}$.

2. (a) On calcule

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=1}^{n} 2k + k^2 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= 2\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= n(n+1)\left(1 + \frac{2n+1}{6}\right) \\
&\boxed{= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}}
\end{aligned}$$

   (b) On calcule

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{k=2}^{n} 2^k \\
&= 2^2\left(\frac{1-2^{n-2+1}}{1-2}\right) \\
&\boxed{= -4(1-2^{n-1})}
\end{aligned}$$

(c) On calcule à l'aide du changement d'indice $j = k - 2$,

$$\begin{aligned} C &= \sum_{k=2}^{n+2} (k-2)^3 \\ &= \sum_{j=0}^{n} j^3 \\ &\boxed{= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

3. On calcule la somme suivante en repérant une somme télescopique

$$\begin{aligned} D &= \sum_{k=3}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=3}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &\boxed{= \ln(n+1) - \ln(3).} \end{aligned}$$

4. On calcule en remarquant un binôme de Newton.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1}(-1)^{n-k} \\ &= 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k}(-1)^{n-k} \\ &= 2 \times (2-1)^n \\ &\boxed{= 2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2 - ECRICOME 2020 - Voie ECT

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$$

1. On a le script Scilab suivant :

```
n=input('entrer un entier n  :  ')
u=0; v=1
for k= 1 : n   // ici u=u(k-1), v=u(k)
     w=u  //  w vaut u(k-1)
     u=  v   // u vaut u(k)
     v= 7*v +8*w    // v vaut 7*u(k)+8*u(k-1)=u(k+1)
end  // en sortie du while u vaut u(n)
disp(u)
```

2. On résout l'équation

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = 49 - (-32) = 81$. Cette équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{7-9}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{7+9}{2} = 8$$

Ainsi, d'après le cours, il existe λ et μ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda(-1)^n + \mu \times 8^n$$

On détermine alors λ et μ en posant le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \quad (u_0) \\ -\lambda + 8\mu & = 1 \quad (u_1) \end{cases} \iff \begin{cases} \mu & = -\lambda \\ \mu + 8\mu & = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda & = -\dfrac{1}{9} \\ \mu & = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

On a donc

$$\boxed{u_n = \frac{-1}{9} \times (-1)^n + \frac{1}{9} \times 8^n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} s_n &= u_{n+1} + u_n \\ &= 7u_n + 8u_{n-1} + u_n \\ &= 8(u_n + u_{n-1}) \\ &= 8s_{n-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison 8.}}$$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 8^n s_0 = 8^n.}$$

4. On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = (-1)^n u_n \quad \text{ct} \quad t_n = v_n - v_{n+1}.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} t_n &= v_n - v_{n+1} \\ &= (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} \\ &= (-1)^n u_n + (-1)^n u_{n+1} \\ &= (-1)^n (u_n + u_{n+1}) \\ &\boxed{= (-1)^n s_n.} \end{aligned}$$

(b) Donc, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\boxed{\text{on a } t_n = (-8)^n \text{ car } s_n = 8^n.}$$

5. Soit n un entier naturel non nul.

(a) Avec $-8 \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1-(-8)^n}{1-(-8)} = \frac{1-(-8)^n}{9}$.

(b) On reconnaît une somme télescopique

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(v_i - v_{i+1}) &= (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + ... + (v_{n-2} - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_n)\\ &= v_0 - v_n\end{aligned}$$

Or $v_0 = (-1)^0 u_0 = 0$ donc

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1}(v_i - v_{i+1}) = -v_n.}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}v_n &= -\sum_{i=0}^{n-1}(v_i - v_{i+1})\\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} t_i\\ &= -\sum_{i=0}^{n-1}(-8)^i\\ &\boxed{= \frac{(-8)^n - 1}{9}.}\end{aligned}$$

On sait que $v_n = (-1)^n u_n$ donc

$$\begin{aligned}u_n &= (-1)^n v_n\\ &= (-1)^n \times \frac{(-8)^n - 1}{9}\\ &= \frac{(-1)^n(-1)^n(8)^n - (-1)^n}{9}\\ &\boxed{= \frac{(8)^n + (-1)^{n+1}}{9}.}\end{aligned}$$

Partie B

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Il s'agit de montrer que $M^2 - 7M - 8I_3$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On calcule

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$

   donc

$$M^2 - 7M - 8I_3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -21 & -21 \\ -21 & -14 & -21 \\ -21 & -21 & -14 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0).$$

$$\boxed{\text{Bilan : } M^2 - 7M - 8I_3 = 0}$$

2. On isole I_3 dans ce qui précède

$$\begin{aligned} M^2 - 7M - 8I_3 = 0 &\iff M^2 - 7M = 8I_3 \\ &\iff (M - 7I_3) \times M = 8I_3 \\ &\iff \frac{1}{8}(M - 7I_3) \times M = I_3 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \tfrac{1}{8}M - \tfrac{7}{8}I_3.}$$

3. (a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Par définition $M^0 = I = 0 \times M + 1 \times I = a_0 M + b_0 I$.

   (b) On pose $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ ainsi $M = M^1 = a_1 M + b_1 I$.

   (c) On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, M^n = a_n M + b_n I_3\}$.

   - **Initialisation :** D'après la question 3(a), en prenant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, on a bien $M^0 = a_0 M + b_0 I$. donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a alors (en se souvenant que $M^2 = 7M + 8I_3$

   $$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= (a_n M + b_n I) \times M \\ &= a_n M^2 + b_n M \\ &= 7a_n M + 8a_n I_3 + b_n M \\ &= (7a_n + b_n)M + 8a_n I_3 \end{aligned}$$

   Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie en prenant $a_{n+1} = 7a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 8a_n$. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, M^n = a_n M + b_n I_3}$.

   De plus les suites (a_n) et (b_n) vérifient,

   $$a_{n+1} = 7a_n + b_n \qquad b_{n+1} = 8a_n$$

   (d) On a d'après la question précédente, $b_n = 8a_{n-1}$ et

   $$a_{n+1} = 7a_n + 8a_{n-1}$$

   De plus $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. Il s'agit donc de la même suite que celle de la partie A.

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} a_n = u_n = \frac{8^n + (-1)^{n+1}}{9}}$$

   On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\boxed{b_n = 8a_{n-1} = \frac{8^{n-1} + (-1)^n}{9}}$$

   Ainsi

   $$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = \frac{8^n + (-1)^{n+1}}{9} M + \frac{8^{n-1} + (-1)^n}{9} I_3}$$

EXERCICE 3 - ECRICOME 2020 Voie ECT

Partie A

1. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc

$$\boxed{\text{elle n'a pas de racine réelle.}}$$

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + x + x^2}$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f

2. Soit $x \neq 0$.

$$f(x) = \frac{x}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)} = \frac{1}{x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right)}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.}$$

3. f est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1 + x + x^2 - x(1 + 2x)}{(1 + x + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x + x^2)^2}.$$

f' ne s'annule qu'en -1 et en 1, $f(-1) = -1, f(1) = \frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

Le signe positif de f' sur $[-1, 1]$ assure que f est croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.

4. (a) Une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 est donnée par la formule

$$\boxed{y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ c'est-à-dire } y = x.}$$

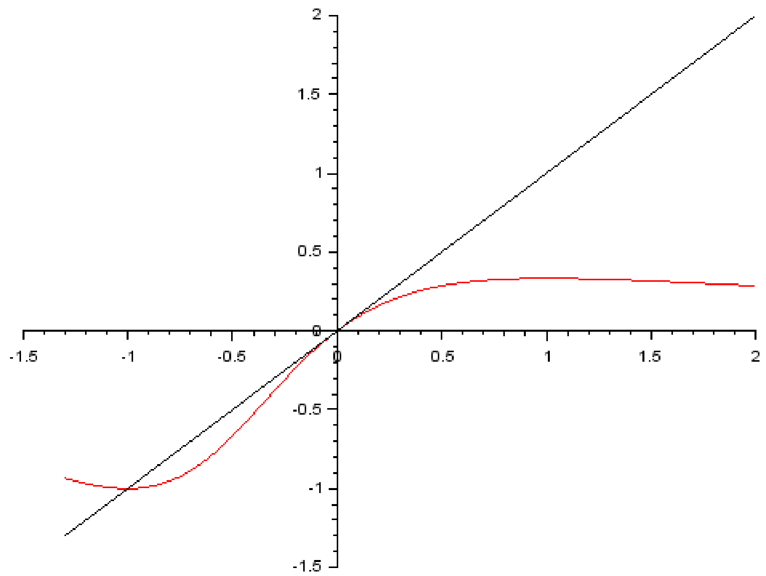
(b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{1+x+x^2} - x \\ &= \frac{x - x(1+x+x^2)}{1+x+x^2} \\ &= \frac{-x^2 - x^3}{1+x+x^2} \\ &= \frac{-x^2(1+x)}{1+x+x^2}. \end{aligned}$$

Or $1 + X + X^2$ n'a pas de racine réelle donc est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et $1 + x + x^2 > 0$. De plus si $x \geqslant -1$ alors $1 + x \geqslant 0$ de sorte que $f(x) - x \leqslant 0$.
Finalement, pour tout réel x de $[-1, +\infty[$, on a $f(x) \leqslant x$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{C}_f \text{ est sous sa tangente en 0 sur l'intervalle } [-1, +\infty[.}$$

5. On a



Partie B
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \times \frac{n}{n} = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

On a $0 < \frac{1}{n}$ donc $0 < n+1 < n+1+\frac{1}{n}$, en composant par $u \mapsto \frac{1}{u}$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a

$$\boxed{f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n$: $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
   On sait que $u_1 = 1 \in]0,1]$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
   Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$, alors
$$0 < u_n \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$
   or f est croissante sur $[0,1]$ donc
$$f(0) \leqslant f(u_n) = u_{n+1} \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
   Comme $u_n > 0$, on a $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2} > 0$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
   Bilan :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.}$$

3. On a le programme Scilab suivant

```
n = input("Entrez un entier n")
u = 1
for k = 2:n
    u = u/(1+u+u^2)
end
disp(u)
```

Partie C

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1+v_n+v_n^2}$$

1. On va montrer par récurrence les propositions $\mathscr{P}_n : \{-1 \leq v_n \leq 0\}$.
   - **Initialisation :** On a $v_1 = -2$ donc
$$\begin{aligned} v_2 = f(v_1) &= \frac{-2}{1-2+(-2)^2} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$
     Ainsi $-1 \leq v_2 \leq 0$ donc $\mathscr{P}_2$ est vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 2$. On a alors d'après le tableau de variation de la question 3 partie A et d'après l'hypothèse de récurrence
$$\begin{aligned} -1 \leq v_n \leq 0 &\Longrightarrow f(-1) \leq f(v_n) \leq f(0) \\ &\Longrightarrow -1 \leq v_{n+1} \leq 0 \end{aligned}$$
     Donc la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** $\boxed{\forall n \geq 2, -1 \leq v_n \leq 0}$.

2. La question 4 de la Partie A nous dit que si $x \in [-1,1]$ alors $f(x) \leqslant x$ donc, pour tout $n \geqslant 2$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ implique $f(v_n) \leqslant v_n$ donc $v_{n+1} \leqslant v_n$.
   Finalement

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$$

3. Vu l'alignement des points au voisinage de la droite d'équation $y=-1$, on conjecture que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est -1.
4. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)=-1 &\iff \frac{x}{1+x+x^2}+1=0 \\ &\iff \frac{1+2x+x^2}{1+x+x^2}=0 \\ &\iff 1+2x+x^2=0 \\ &\iff (1+x)^2=0 \\ &\iff x=-1 \end{aligned}$$

   (b) La négation de $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n\neq -1\right)$ est $\left(\exists n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=-1\right)$.
   Supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $v_n=-1$. Comme $v_1=-2$, on a $n>1$ donc v_{n-1} existe et $v_n=f(v_{n-1})=-1$ donc avec la question ci-dessus $v_{n-1}=-1$. On montre alors de proche en proche que $v_n=v_{n-1}=...=v_2=-1$ et donc $f(v_1)=v_2=-1$ donc $v_1=-1$ ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n\neq -1.}$$

Exercice 4 - Probabilités

Une entreprise peut faire appel à deux fournisseur, la société A et la société B. La probabilité pour que la société A livre un produit conforme est de $\frac{9}{10}=0,9$ alors que la probabilité que la société B livre un produit conforme est de $\frac{19}{20}$: On se propose d'étudier diverses situations liées à ces données.

Situation 1

Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société A dans 60% des cas, et la société B sinon. On notera les évènements

— A : "L'entreprise choisit la société A"

— B : "L'entreprise choisit la société B"

— C : "L'entreprise reçoit un produit conforme"

1. On déduit la probabilité suivante de l'énoncé

$$\boxed{P_A(C)=0,9.}$$

2. La famille (A,B) forme un système complet d'évènement. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A)P_A(C)+P(B)P_B(C) \\ &= 0,6\times 0,9+0,4\times\frac{19}{20} \\ &= \frac{54}{100}+\frac{38}{100} \\ &= 0,92 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité que le produit soit conforme est de 0,92.}}$$

3. On cherche la probabilité qu'un colis ait été livré par la société A sachant que le produit n'est pas conforme. D'après la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} P_{\overline{C}}(A) &= \frac{P(A)}{P(\overline{C})} P_A(\overline{C}) \\ &= \frac{0,6}{0,08} \times 0,1 \\ &= \frac{6}{8} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un colis ait été livré par la société A sachant qu'il n'est pas conforme est } \frac{3}{4}.}$$

4. On a

$$P(A \cap C) = P(A)P_A(C) = 0,54$$

et

$$P(A) \times P(C) = 0,6 \times 0,92 = 0,552$$

$$\boxed{\text{Les évènements } A \text{ et } C \text{ ne sont donc pas indépendants.}}$$

5. On a d'après la formule des probabilités composés,

$$P(A \cap C) = P(A)P_A(C) = \frac{18}{20}x.$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A)P_A(C) + P(B)P_B(C) \\ &= \frac{18}{20}x + (1-x) \times \frac{19}{20} \\ &= \frac{19}{20} - \frac{1}{20}x \end{aligned}$$

Ainsi

$$P(A) \times P(C) = x\left(\frac{19}{20} - \frac{x}{20}\right)$$

On résout alors l'équation

$$\begin{aligned} \frac{18}{20}x = \frac{19}{20}x - \frac{x^2}{20} &\iff \frac{x^2}{20} - \frac{1}{20}x = 0 \\ &\iff x^2 - x = 0 \\ &\iff x(x-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les évènements } A \text{ et } C \text{ sont indépendants si et seulement si } x = 0 \text{ ou } x = 1.}$$

Situation 2

Dans cette situation, il est décidé que le premier jour, l'entreprise utilise la société A. Puis si au jour n ($n \in \mathbb{N}^*$), le produit arrivé n'est pas conforme, alors l'entreprise choisit la société B au jour $n+1$, si le produit est conforme, elle choisit la société A au jour $n+1$. On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement C_n : " le colis est conforme au jour n", et on note $p_n = P(C_n)$: :

1. On cherche la probabilité que le produit soit conforme au premier jour. On sait que l'entreprise choisit la société A le premier jour. Donc

$$\boxed{p_1 = 0,9.}$$

2. Si le produit est conforme au jour n alors l'entreprise choisit la société A. Ce qui signifie :

$$P_{C_n}(C_{n+1}) = 0,9.$$

Si le colis est arrivé à l'heure au jour n alors l'entreprise choisit la société B. Ce qui signifie :

$$P_{\overline{C_n}}(C_{n+1}) = \frac{19}{20}.$$

On sait également que $P(\overline{C_n}) = 1 - p_n$. Comme $(C_n, \overline{C_n})$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
& P(C_{n+1}) = P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) + P(\overline{C_n})P_{\overline{C_n}}(C_{n+1}) \\
\iff\quad & p_{n+1} = p_n \times \frac{18}{20} + (1-p_n) \times \frac{19}{20} \\
\iff\quad & p_{n+1} = -\frac{1}{20}p_n + \frac{19}{20}
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{1}{20}p_n + \frac{19}{20}.}$$

3. On résout l'équation

$$\begin{aligned}
x = -\frac{1}{20}x + \frac{19}{20} \quad & \iff \quad \frac{21}{20}x = \frac{19}{20} \\
& \iff \quad x = \frac{19}{21}
\end{aligned}$$

On pose la suite $v_n = p_n - \frac{19}{21}$. On montre que cette suite est géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{19}{21} \\
&= -\frac{1}{20}p_n + \frac{19}{20} - \frac{19}{21} \\
&= -\frac{1}{20}\left(v_n + \frac{19}{21}\right) + \frac{19 \times 21 - 19 \times 20}{420} \\
&= -\frac{1}{20}v_n - \frac{19}{420} + \frac{19}{420} \\
&= -\frac{1}{20}v_n
\end{aligned}$$

De plus $v_1 = p_1 - \frac{19}{21} = \frac{9}{10} - \frac{19}{21} = \frac{189-190}{210} = -\frac{1}{210}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = -\frac{1}{210} \times \left(-\frac{1}{20}\right)^{n-1}$$

On a alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{19}{21} - \frac{1}{210} \times \left(-\frac{1}{20}\right)^{n-1}.}$$

4. Programme qui affiche les n premiers termes de la suite (plusieurs façon de faire sont possibles)

```
n = input("Entrez un entier n")
p = 0.9
disp("La probabilité que le produit soit conforme au jour 1 est " + string(p) +".")

for k = 2:n
    p = - 1/20*p + 19/20
    disp("La probabilité que le produit soit conforme au jour " + string(k) +" est " + s
end
```

Situation 3

Finalement, l'entreprise décide d'utiliser les sociétés en fonction de leurs précédentes réussites. Pour cela ils utilisent une urne contenant des boules rouges et vertes. Chaque jour, l'entreprise tire une boule. Si la boule tirée est rouge, l'entreprise utilisée la société A. Sinon elle utilise l'entreprise B. Enfin,

- Au jour 1, on a 1 boule rouge et 1 boule verte.
- Si la société A livre un produit conforme, on rajoute une boule rouge dans l'urne, sinon on ajoute une boule verte.
- Si la société B livre un produit conforme, on rajoute une boule verte dans l'urne sinon on ajoute une boule rouge.

On notera les évènements

- C_n : "Le produit est conforme au jour n".
- A_n : "On choisit la société A au jour n".
- B_n : "On choisit la société B au jour n".

1. $\boxed{\text{Les évènements } A_n \text{ et } B_n \text{ sont complémentaires.}}$
2. D'après l'énoncé, $\boxed{P(A_1) = P(B_1) = \frac{1}{2}.}$
3. On calcule la probabilité de A_2 sachant $A_1 \cap C_1$. Si le produit était conforme au premier jour, alors l'urne contient désormais 2 boules rouges et 1 boule verte. Alors
$$\boxed{P_{A_1 \cap C_1}(A_2) = \frac{2}{3}.}$$
4. On cherche la probabilité de l'évènement $A_1 \cap A_2$. La famille $(C_1, \overline{C_1})$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales.
$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1 \cap A_2 \cap C_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{C_1}) \\ &= P(A_1 \cap C_1)P_{A_1 \cap C_1}(A_2) + P(A_1 \cap \overline{C_1})P_{A_1 \cap \overline{C_1}}(A_2) \end{aligned}$$
On a également
   - $P(A_1 \cap C_1) = P(A_1)P_{A_1}(C_1) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{20}$
   - $P(A_1 \cap \overline{C_1}) = P(A_1)P_{A_1}(\overline{C_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$

— $P_{A_1\cap C_1}(A_2)=\dfrac{2}{3}, \quad P_{A_1\cap\overline{C_1}}(A_2)=\dfrac{1}{3}$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(A_1\cap A_2) &= \frac{9}{20}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{20}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{10}+\frac{1}{60} \\ &= \frac{19}{60} \end{aligned}$$

On a finalement,

$$\boxed{P(A_1\cap A_2)=\frac{19}{60}.}$$

5. Afin de calculer la probabilité de A_2, on utilise le système complet d'évènement $(A_1\cap C_1, A_1\cap\overline{C_1}, B_1\cap C_1, B_1\cap\overline{C_1})$ et la formule des probabilités totales :

$$P(A_2)=P(A_1\cap C_1)P_{A_1\cap C_1}(A_2)+P(A_1\cap\overline{C_1})P_{A_1\cap\overline{C_1}}(A_2)+P(B_1\cap C_1)P_{B_1\cap C_1}(A_2)+P(B_1\cap\overline{C_1})P_{B_1\cap\overline{C_1}}(A_2)$$

On a également

— $P(B_1\cap C_1)=P(B_1)P_{B_1}(C_1)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{19}{20}=\dfrac{19}{40}$

— $P(B_1\cap\overline{C_1})=P(B_1)P_{B_1}(\overline{C_1})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{40}$

— $P_{B_1\cap C_1}(A_2)=\dfrac{1}{3}, \quad P_{B_1\cap\overline{C_1}}(A_2)=\dfrac{2}{3}$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \frac{9}{20}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{20}\times\frac{1}{3}+\frac{19}{40}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{40}\times\frac{2}{3} \\ &= \frac{19}{60}+\frac{19}{120}+\frac{2}{120} \\ &= \frac{59}{120} \end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{P(A_2)=\dfrac{59}{120}, \quad \text{et} \quad P(B_2)=1-P(A_2)=\dfrac{61}{120}.}$

6. On rappelle que d'après les questions précédentes

$$P(A_1)=\frac{1}{2}, \quad P(A_2)=\frac{61}{120} \quad P(A_1\cap A_2)=\frac{19}{60}=\frac{76}{240}$$

Ainsi

$$P(A_1)\times P(A_2)=\frac{61}{140}\neq P(A_1\cap A_2)$$

On conclut

$$\boxed{\text{Les évènements } A_1 \text{ et } A_2 \text{ ne sont pas indépendants.}}$$